Aplicación del enfoque de Markowitz al cálculo del Valor en Riesgo (VaR) a un portafolios de divisas

Francisco López Herrera
Investigador de tiempo completo de la División de Investigación de la Facultad de Contaduría y Administración, UNAM.

Resumen

En la primera parte se describe, a grandes rasgos, el planteamiento de cómo seleccionar de una manera óptima el portafolios de inversión esbozado por Harry Markowitz y que, posteriormente, se convirtiera en la simiente de la teoria moderna en este tipo de inversiones. En la segunda parte, el objetivo de tal descripción es sentar las bases de su aplicación, y en última instancia contribuir a su divulgación. Es necesario aclarar que el desarrollo de este trabajo no está dirigido para especialistas en la materia, sino para quien desee o necesite tener un primer acercamiento a la misma. Por estas razones, se aborda el enfoque de Markowitz desde una perspectiva teórica sin intento alguno de crítica. Finalmente, en la última sección se presenta un ejemplo de su aplicación en la estimación del Valor en Riesgo de un portafolios de divisas.

El enfoque de Markowitz

Harry Markowitz, galardonado en 1990 con el Premio Nobel de Economía, es reconocido como el pionero de la teoría moderna del portafolios de inversión gracias a su trabajo publicado en 1952.[1] El objetivo de su propuesta es dar solución al problema de seleccionar óptimamente un portafolios de inversión, por ello constituyó la simiente para ulteriores desarrollos, los que a su vez han contribuido al estado en que se encuentra actualmente la teoría del portafolios. Cabe mencionar que también destacan las aportaciones de James Tobin en relación con el problema de la inversión en condiciones de riesgo, esfuerzo que también fue laureado con el Premio Nobel de Economía en 1981.

Anteriormente a la propuesta de Markowitz, los textos asumían, explícita o implícitamente, que para configurar un portafolios de inversión (dos o más activos o instrumentos financieros) se debían seleccionar los "mejores instrumentos" con base en criterios relacionados con su atracción relativa individual. Como consecuencia de lo anterior, el problema de configurar un portafolios de inversión diversificado se reduciría, como lo señala Jack

[1] Harry Markowitz, "Portfolio selection", *Journal of Finance*, pp 77-91.

Clark Francis, a una diversificación *näive* o ingenua o, bien, a una diversificación interindustria. En el primer caso se trata simplemente de seleccionar acciones de empresas diferentes; es decir, con base en el principio de "no poner los huevos en la misma canasta". La diversificación interindustria consiste en seleccionar acciones de empresas pertenecientes a industrias diferentes, con lo que se puede aprovechar su desempeño diferente en las fases del ciclo económico.

Asimismo, existía la opinión generalizada de que la maximización del rendimiento esperado era el criterio apropiado para llevar a cabo la selección de los instrumentos de inversión. Sin embargo, Markowitz detectó una inconsistencia entre la meta de maximizar el rendimiento esperado y la práctica común de diversificación de los portafolios.[2] Su argumento sostiene que de ser el rendimiento esperado el único criterio de selección, basta con sólo adquirir instrumentos con el más alto rendimiento esperado y no cabe, entonces, la preocupación por configurar un portafolios diversificado. De hecho, según él, la diversificación se explica como una conducta racional del inversionista quien busca protegerse de la posible variabilidad del rendimiento seleccionado.

Los planteamientos fundamentales del modelo de Markowitz son los siguientes:[3]

a) Las dos características importantes de un portafolios son el rendimiento esperado y el riesgo de la inversión.

b) Un inversionista racional buscará tener un portafolios que le permita maximizar el rendimiento esperado, dado un nivel de riesgo, o minimizar el riesgo, dado un nivel de rendimiento esperado. A este portafolios óptimo se le denomina eficiente.

A partir de los supuestos anteriores, según Markowitz, se deduce que:

- Es posible identificar, al menos teóricamente, los portafolios eficientes analizando el rendimiento esperado de cada uno de los valores integrantes, así como las desviaciones respecto de dicho rendimiento y la interrelación existente entre los rendimientos y variaciones conjuntas de los diversos valores que configuran el portafolios. Por este motivo se ha dado en llamarle *análisis de la media y de la varianza* a este proceso.

- Mediante un programa desarrollado en computadora se puede determinar las asignaciones óptimas de los fondos de inversión a los valores incluidos en el portafolios de tal forma que éste sea eficiente, en función del rendimiento y riesgo conjunto.

La base teórica en que se fundamenta la propuesta de Markowitz es acorde con los supuestos de la elección racional del consumidor propia del enfoque microeconómico neoclásico. En los supuestos de elección racional del inversionista se encuentran implícitos los supuestos de las preferencias de los inversionistas dadas: una función de utilidad f(U), una dotación específica de riqueza W, así como un plan de consumo. Es decir, la suposición de que el inversionista toma decisiones racionales implica que al elegir entre diversas opciones preferirá aquella que maximice su función de utilidad f(U), bajo las restricciones impuestas por el total de la riqueza de que dispone (restricción presupuestal) y el plan de consumo que elija tanto en el presente como para un periodo futuro.

---

[2] James Lorie y Richard Brealey, *Modern Developments in Investment Management, A book of readings*, p. 273

[3] James H. Lorie, Peter Dodd y Mary Hamilton Kimpton, *The Stock Market: Theories and Evidence*, p. 109. *Cfr.* Harry M. Markowitz, *Mean-variance Analysis in Porfolio Choice and Capital Markets*, pp. 42-70 y 301-345

Debido a que la decisión de invertir en instrumentos de riesgo lleva implícita la decisión de diferir un nivel seguro de consumo presente, a cambio de un consumo en el futuro, pero cuyo nivel no conoce en el presente, su interés primordial es entonces maximizar el valor esperado de su función de utilidad E[f(u)], que en términos de la posibilidad de inversión en portafolios alternativos implica la selección del portafolios que maximice la riqueza terminal. Así, de acuerdo con uno de los axiomas de Morgenstern-Neumann, concretamente el respectivo a la preferencia entre dos activos *x*, *y*, el inversionista preferirá invertir en aquel que le proporcione mayor utilidad ($x \supset y$), es decir, en términos de la utilidad esperada de ambos activos, si $E[u(x)] > E[u(y)]$ preferirá a x, pues éste le proporcionará una utilidad mayor que si opta por y.[4]

Sin embargo, el criterio de maximización de la utilidad esperada no es suficiente para determinar si un portafolios es eficiente debido a que, como se ha mencionado, Markowtiz postula que entre diferentes portafolios que ofrezcan el mismo rendimiento, un inversionista, dado que es racional, preferirá el que ofrezca el menor riesgo.[5]

En términos formales se puede establecer el rendimiento esperado de un portafolios, $E(R_p)$, como la sumatoria del rendimiento individual de cada uno de los activos ponderado por la proporción que guardan en el portafolios (proporción de la asignación presupuestal), esto es:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} r_i w_i$$

donde:

r_i = rendimiento individual del activo i-ésimo

w_i = asignación presupuestal al activo i-ésimo

s.a.

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} w_i \leq 1$$

Por tanto, el rendimiento de un portafolios es resultado de las asignaciones a los diferentes activos en que se puede invertir un presupuesto dado, ponderadas por los rendimientos de cada uno de ellos. Una idea básica que puede rescatarse de lo anterior es que el rendimiento de un portafolios puede modificarse simplemente haciendo variar las asignaciones presupuestales.

Por otra parte, debido a que Markowitz considera que el inversionista es adverso al riesgo, adquiere una importancia fundamental que el grado de riesgo a que se encuentra sujeta su inversión sea el menor posible. De esto se sigue que la racionalidad del inversionista implica que el portafolios óptimo es entonces aquel que debe cumplir una meta de rendimiento pero con un riesgo mínimo. En realidad el problema surge de que:

> El portafolios con máximo rendimiento esperado no es necesariamente el que tiene mínima varianza. Hay una tasa a la que el inversionista puede obtener rendimiento esperado tomando varianza o reducir la varianza abandonando rendimiento esperado.[6]

De esta idea queda claro que la decisión del inversionista se da como un intercambio entre el rendimiento y el riesgo de su inversión.

Ahora bien, utilizando la varianza como una medida del riesgo, para el caso de un portafolios –debido a que los rendimientos están altamente correlacionados y la varianza del portafolios no puede eliminarse totalmente mediante la diversificación– es necesario tomar en cuenta no sólo las varianzas individuales de los activos que lo forman, sino que adquiere una gran importancia el efecto recíproco

---

[4] Esta condición es consistente con el *supuesto de no saciedad*.
[5] Condición consistente con el *supuesto de aversión al riesgo*.
[6] Harry Markowitz, "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, p. 79.

de las varianzas entre dichos activos. Este efecto se recoge mediante la medición de la variación conjunta o covarianza. Por tal motivo, la varianza del portafolios se expresa como:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

donde:
w_i = Asignación presupuestal al activo i-esimo
w_j = Asignación presupuestal al activo j-esimo
σ_{ij} = Covarianza entre los activos i, j

De manera equivalente, considerando la correlación entre los activos que conforman el portafolios, la covarianza se puede expresar como:

$$\sigma_{ij} = \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j$$

$r_{i,j}$ = coeficiente de correlación entre los activos i-ésimo y el j-ésimo
σ_i = desviación estándar del activo i-ésimo
σ_j = desviación estándar del activo j-ésimo

Al igual que en el caso del rendimiento, el riesgo del portafolios, medido por su varianza, es una función de la asignación presupuestal a cada activo, así como de las varianzas individuales y de las varianzas entre los activos (varianzas conjuntas o covarianzas). Un aspecto importante de lo anterior es que la diversificación puede contribuir a reducir el riesgo debido a los efectos de la variación conjunta, pudiendo eliminarse, gracias a ella, parte del riesgo (específicamente el no sistemático o diversificable), quedando como nivel de riesgo residual aquel que no es posible eliminar mediante la diversificación, pues es común a todos los diversos valores negociados en el mercado (riesgo sistemático o no diversificable).

En términos de la correlación existente entre los diversos activos, de la propuesta de Markowitz se desprende que son preferibles los activos menos que perfectamente correlacionados ($\rho < 1$). El beneficio de reducción del riesgo será mayor mientras menos correlacionados se encuentren. El caso ideal sería una correlación perfectamente negativa ($\rho = -1$); sin embargo, en la práctica puede ser muy difícil si no imposible ya que las acciones generalmente tienden a moverse en una misma dirección aunque con diferentes intensidades.

En términos del rendimiento esperado (media) y el riesgo (varianza), el problema del inversionista se puede formular como:

$$\text{maximizar } E(Rp) = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i$$

s.a.

$$\sigma_p^2$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} w_i \leq 1$$

El problema del inversionista también puede plantearse de la siguiente manera:

$$\text{minimizar } \sigma_p^2$$

s.a.

$$E(Rp) = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} w_i \leq 1$$

Esto es, dado un nivel de rendimiento esperado objetivo, la conformación del portafolios óptimo será aquella que maximice el rendimiento esperado, dado un nivel de riesgo, o que minimice el riesgo dado un nivel de rendimiento esperado. En ambos casos existe como restricción impuesta el presupuesto disponible para llevar a cabo la inversión.

Las diferentes posibles combinaciones de activos forman el conjunto factible de portafolios, esto es, los diferentes portafolios en que se puede invertir. Al trazar el conjunto factible en un plano bidimensional —con el riesgo en el eje de las ordenadas y el rendimiento esperado en las abscisas— su frontera superior izquierda forma la llamada frontera eficiente, misma que define al conjunto eficiente de portafolios de acuerdo con el teorema del conjunto eficiente:

Un inversionista escogerá su portafolios óptimo del conjunto de portafolios que:

1. Ofrece el máximo rendimiento esperado para diversos niveles de riesgo, y

2. Ofrece el mínimo riesgo para diversos niveles de rendimiento esperado.[7]

La conclusión del análisis de la media y la varianza lleva a que la solución al problema de optimizar el logro de un rendimiento objetivo con un riesgo mínimo se resuelva buscando en la frontera eficiente el portafolios que satisfaga las condiciones impuestas: rendimiento objetivo con mínimo riesgo, de acuerdo con la restricción presupuestal. De hecho, debido a la forma de la frontera eficiente (cóncava pues la correlación es de -1 y 1 en sus límites inferior y superior respectivamente) se puede hablar, en función del riesgo, de la existencia de un mínimo global. Sin embargo, la búsqueda del portafolios óptimo (mínimo riesgo) dado un rendimiento objetivo puede implicar la necesidad de encontrar un mínimo local.

Para el caso de dos activos la situación no resulta extraordinariamente complicada porque se puede recurrir al criterio de la primera derivada expresando las asignaciones presupuestales en términos de uno de los dos activos que forman el portafolios. La situación resulta compleja cuando el portafolios está conformado por diversos activos. Para resolver el problema Markowitz desarrolló un algoritmo que permite llevar a cabo la selección del portafolios; sin embargo, debido a lo complicado que resulta el manejar un portafolios con un gran número de activos (mientras más grande sea su número mayor es la dificultad) sólo es posible optimar el portafolios aplicando dicho algoritmo mediante un programa de computadora.

No obstante la dificultad práctica para instrumentar el medio de análisis requerido para seleccionar activos que formen un portafolios óptimo, es indudable que Markowitz contribuyó a la formación de la teoría moderna del portafolios de inversión, pues sentó las bases de los desarrollos que se han dado desde entonces tanto en el plano teórico como en el práctico.

Aplicación del modelo de Markowitz a la estimación del valor en riesgo

El Valor en Riesgo, o simplemente VaR por *Value at Risk*, "...resume la pérdida máxima esperada (o peor pérdida) a lo largo de un horizonte de tiempo objetivo dentro de un intervalo de confianza dado".[8] Esta medida resumida de la exposición al riesgo de los activos financieros se ha generalizado con el objetivo de contribuir a una administración más eficaz del riesgo, presentando la exposición al riesgo de los activos de manera simple y fácil de entender.

Para ejemplificar la aplicación del modelo de Markowitz al cálculo del VaR, siguiendo a Levich[9], supongamos que se cuenta con una inversión cuyo valor en el presente es de 100,000 dólares en un

[7] William F. Sharpe y Alexander Gordon J., *Investments*, p. 155.
[8] Phillipe Jorion, *Valor en Riesgo: el nuevo paradigma para el control de riesgos con derivados*, p. 41.
[9] Richard M. Levich, *International Financial Markets, prices and policies*, pp. 596-599.

portafolios conformado por libras esterlinas, marcos alemanes y yenes japoneses, distribuido de acuerdo con la tabla 1:

MONEDA	$	%
LIBRA	40,000.00	40.00%
MARCO	35,000.00	35.00%
YEN	25,000.00	25.00%
TOTAL	100,000.00	100.00%

Tabla 1. Configuración del portafolios

Ahora bien, en relación con la definición del VaR, el problema consiste en encontrar la máxima pérdida probable a que está sujeto el valor de este portafolios en un día de operación dado un nivel de confianza. Una práctica común es tomar en consideración los datos de 100 días de operación, razón por la que en la tabla 2 se reproducen las cotizaciones de las diferentes monedas que configuran el portafolios del ejemplo expresadas en dólares estadunidenses.

LIBRA	MARCO	YEN
1.6518	0.556	0.00767
1.6518	0.556	0.00767
1.6311	0.5476	0.00747
1.6268	0.546	0.00748
1.6273	0.5488	0.00762
1.6132	0.5489	0.00754
1.6134	0.5493	0.00757
1.6215	0.5491	0.00754
1.6348	0.5495	0.00759
1.6289	0.5489	0.00764
1.6303	0.5459	0.00769
1.6335	0.5454	0.00773
1.6335	0.5454	0.00773
1.6276	0.5435	0.00779
1.6311	0.5497	0.00786
1.6485	0.5542	0.00786
1.6734	0.5626	0.00796
1.6551	0.5569	0.00788
1.6431	0.5589	0.00798

LIBRA	MARCO	YEN
1.6415	0.5519	0.00802
1.6396	0.547	0.00796
1.6329	0.5465	0.00788
1.6388	0.5498	0.0079
1.6466	0.5522	0.00794
1.6578	0.5552	0.00809
1.6556	0.5597	0.0081
1.6426	0.5529	0.00806
1.63	0.5504	0.00806
1.6252	0.5533	0.00812
1.6327	0.5498	0.0081
1.6388	0.553	0.00803
1.6393	0.5498	0.00799
1.6393	0.5498	0.00799
1.6327	0.5476	0.0079
1.6385	0.549	0.00791
1.6356	0.5506	0.00793
1.6377	0.549	0.00781
1.6488	0.5576	0.00782
1.6502	0.5563	0.00782
1.6431	0.5498	0.00777
1.6439	0.551	0.00786
1.6453	0.551	0.00793
1.6458	0.5512	0.00798
1.6521	0.5526	0.00792
1.6477	0.5499	0.00789
1.6324	0.5454	0.00782
1.6356	0.5456	0.00782
1.6375	0.5472	0.00783
1.641	0.5468	0.00784
1.6483	0.5461	0.00773
1.6576	0.5473	0.00773
1.6697	0.5499	0.0078
1.6686	0.5497	0.00771
1.6692	0.5497	0.00771
1.6714	0.5479	0.00769
1.6661	0.5452	0.00765
1.6689	0.5464	0.00769
1.6776	0.5478	0.00769
1.6753	0.5471	0.00768
1.6742	0.5473	0.00777
1.6872	0.5497	0.00779
1.6832	0.5475	0.00767
1.6784	0.5413	0.00758
1.6717	0.5411	0.00751
1.6717	0.5398	0.00748

LIBRA	MARCO	YEN
1.6633	0.5393	0.00749
1.6595	0.5414	0.0074
1.6661	0.5434	0.00742
1.6681	0.5448	0.0075
1.6681	0.5448	0.00762
1.6681	0.5448	0.00772
1.6762	0.5518	0.00772
1.6852	0.5562	0.00773
1.6909	0.5538	0.00759
1.6832	0.553	0.00759
1.6717	0.5552	0.00757
1.6756	0.5592	0.00761
1.6717	0.5574	0.00768
1.6644	0.5561	0.00768
1.6692	0.5588	0.00762
1.6742	0.5594	0.00756
1.6692	0.5579	0.00756
1.67	0.5567	0.00753
1.6725	0.5569	0.00753
1.6647	0.5617	0.00753
1.6636	0.566	0.00752
1.6595	0.5661	0.00761
1.6491	0.5657	0.00751
1.6393	0.5649	0.00751
1.6297	0.5629	0.00753
1.6321	0.563	0.00753
1.6303	0.5619	0.00746
1.6311	0.5626	0.00747
1.6271	0.5603	0.00748
1.6215	0.5602	0.00743
1.6213	0.5607	0.00734
1.6324	0.565	0.00733
1.6327	0.5695	0.00735
1.6295	0.5683	0.00742
1.6295	0.5683	0.00736

Tabla 2. Cotizaciones en dólares estadunidenses

Debido a que estamos interesados en determinar el riesgo del portafolios, que se mide por su volatilidad, podemos aplicar la fórmula propuesta por Markowtiz para el cálculo de la varianza (riesgo) y, a partir de ésta, calcular la desviación estándar del portafolios para poder determinar el VaR dado un nivel de confianza seleccionado.

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

Para ello se requiere conocer las desviaciones estándar de cada una de las monedas (Tabla 3) y los coeficientes de la correlación entre ellas (Tabla 4).

σ
Libra 0.01920692
Marco 0.00700768
Yen 0.00019974

Tabla 3. Desviaciones estándar

	MATRIZ DE CORRELACIONES		
	LIBRA	MARCO	YEN
LIBRA	1.00	(0.11)	(0.07)
MARCO	(0.11)	1.00	(0.24)
YEN	(0.07)	(0.24)	1.00

Tabla 4. Correlaciones

Con los datos completos se procede al cálculo de la varianza y de la desviación estándar del portafolios, que resultan de 0.0001 y 0.0078 respectivamente.

Con base en el valor de la desviación estándar se puede estimar el VaR al nivel de confianza seleccionado; por ejemplo, al 95% de confianza bastaría multiplicar el valor del portafolios por 1.96 veces la desviación estándar, en nuestro caso:

100,000 dólares x 1.96 x 0.0078 = 1,528.80 dólares

Si nos basamos en nuestra estimación también se pueden obtener los límites de confianza para el valor del portafolios:

100,000 + 1,528.80 = 101,528.80
100,000 - 1,528.80 = 98,471.20

Es decir, la máxima pérdida esperada al 95% de confianza es de 1,528.80 dólares, lo que implica que el portafolios puede ver disminuido su valor a 100,000-1,528.80 = 98,471.20 dólares.

Bibliografía

JORION, Phillipe, *Valor en Riesgo: el nuevo paradigma para el control de riesgos con derivados*, Limusa, México, 1999.

LEVICH, Richard M., *International Financial Markets, prices and policies*, McGraw-Hill, New York, 1998.

LORIE, James y Richard Brealey, *Modern Developments in Investment Management. A book of readings*, Dryden Press, Hindsale, Illinois, 1978.

LORIE, James H., Peter Dodd y Mary Hamilton Kimpton, *The Stock Market: Theories and Evidence*, 2ª ed., Dow Jones-Irwin, Illinois, 1985.

MARKOWITZ, Harry, "Portfolio selection", *Journal of Finance*, No. 12, marzo, 1952.

SHARPE, William F. y Alexander Gordon J., *Investments*, 4ª ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1990.